



Mathematical Education Center

1. פשט את הביטוי:

$$(a+b+c)^4 - (a+b)^4 - (a+c)^4 - (b+c)^4 + a^4 + b^4 + c^4$$

2. חשב: $\left(\begin{array}{cc} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right)^{2008}$

3. מספר שופטים טעמו שלוש עוגות. כל עוגה דורגה על ידי כל שופט (בדירוג מ-1 עד 10). האם ייתכן שעל פי רוב השופטים עוגה A טובה מעוגה B ויחד עם כך על פי רוב השופטים עוגה B טובה יותר מעוגה C ולמרות זאת על פי רוב השופטים עוגה C טובה יותר מעוגה A?

4. הסדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ מוגדרת ברקורסיה באופן הבא: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = x_n + e^{-x} \end{cases}$. חשב את גבול הסדרה.

5. שלושה שחקנים חכמים (אבי, בני וגיל) מוציאים אבנים מערימה בסדר מעגלי. בכל מהלך יכול שחקן להוציא אבן אחת או שתיים. בתחילת המשחק יש בערימה 5769 אבנים. אבי משחק ראשון, בני שני וגיל שלישי. השחקן אשר מוציא את האבן האחרונה מקבל \$10 והשחקן שבא אחריו (בסדר המעגלי) מקבל \$1. השחקן השלישי לא מקבל כלום.

לדוגמא, אם אבי לוקח את האבן האחרונה, הוא מקבל \$10, בני מקבל \$1 וגיל לא מקבל כלום.

לשחקנים אסור לדבר ביניהם לפני המשחק ובמהלכו. בהנחה שכל שחקן רוצה לקבל כמה שיותר כסף שהוא יכול, מה תהיה התוצאה?

6. לאילו $\lambda \in (0,1)$ ממשיים ניתן לטעון בוודאות כי לכל פונקציה f רציפה, מוגדרת בתחום של $[0,1]$ ומקיימת את התנאי $f(0)=f(1)=0$, ניתן למצוא x כך ש- $f(x)=f(x+\lambda)$.



Mathematical Education Center

7. יהי K_7 הגרף השלם בעל 7 קודקודים. עבור אילו ערכים של N ניתן לצבוע את קשתות הגרף ב- N צבעים שונים, כך שהגרף לא יכיל מעגל כלשהו שכל קשתותיו צבועים באותו צבע.

8. מצא את כל ערכי ה- n האפשריים עבורם למשוואה

$$(a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2) - (a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)^2 = n + 1$$

קיימים $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ טבעיים אשר מקיימים את המשוואה.

9. נתונים מספר סופי של מספרים חיוביים a_1, a_2, \dots, a_n .

זוג אינדקסים (k, m) נחשב לזוג טוב אם עבור כל j מתקיים:

$$(a_k + a_j)(m - k) \geq (a_k + a_m)(j - k)$$

זוג אינדקסים (k, m) נחשב לזוג רע אם עבור כל j מתקיים:

$$(a_m + a_j)(m - k) \geq (a_k + a_m)(m - j)$$

הראה שיש לפחות זוג אחד שהוא גם טוב וגם רע.

10. עבור מספר חיובי c , תהי $C = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq c\}$

תיבה ב- R^3 . יהי a מספר ממשי.

עבור כל מספר שלם n נסתכל על המישור ב- R^3 המוגדר על ידי המשוואה:

$$x + y + z = a + n$$

בצורה זו נקבל עבור כל a משפחה של מישורים מקבילים.

חיתוך של התיבה C עם משפחת מישורים כנ"ל מורכבת ממספר מצולעים במרחב.

א. הוכח שסכום השטחים של המצולעים המתקבלים באופן זה אינו תלוי

בערכו של a .

ב. הוכח שמרכז הכובד של מצולעים אלו אינו תלוי בערכו של a

(בהנחה שהצפיפות שווה ואחידה בכל המצולעים).