Ariel University Center

Department of Computer Science and Mathematics

Tel: 03-9066618 E-mail: adom@ariel.ac.il Fax: 03-9066692

P.O. Box 3, Ariel 44837, ISRAEL

בס"ד

Задачи Математической Интернет Олимпиады

Март 19, 2008

- Перед Вами 10 задач различного уровня сложности. Решите как можно больше из них.
-Для оформления решения рекомендуется использовать Word. Если Вы посылаете решения в виде рукописного текста, пишите разборчиво. Неразборчивые тексты рассматриваться не будут.
-Решение каждой из задач должно быть подробно аргументировано. Решения, в которых отсутствует аргументация, не будут засчитаны.
-Решения должны быть посланы по электронной почте на адрес, который находится на сайте Олимпиады.
-Каждый участник может прислать решения только один раз.
-Количество очков за каждую задачу обратно пропорционально количеству участников её решивших.
-При оценке решения учитывается его правильность и точность объяснения. При равной итоговой оценке преимущество получает тот, кто представил решение раньше.

Задача 1.

Вычислите следующие пределы:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n}^{2n}\frac{1}{k!}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}$.

Задача 2.

Дан куб с длиной сторон равной 1. Докажите, что среди любых 9 точек, которые мы выбираем внутри куба есть 2 такие, что расстояния между ними не превосходит $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ariel University Center
Department of Computer Science and Mathematics
Tel: 03-9066618 E-mail: adom@ariel.ac.il Fax: 03-9066692
P.O. Box 3, Ariel 44837, ISRAEL

בס"ד

Задача 3.

a) Вычислите сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$,

b) Найдите предел $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\int_1^n \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$

Задача 4.

Докажите что $\int_0^{\sqrt{2\pi}}\sin\left(x^2\right)dx>0$.

Задача 5.

Представим себе на координатной плоскости изображён график полинома n-ой степени $p(x)=a_o+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$ (где $n>1$) и дана некоторая точка Q. Докажите, что не может быть более n касательных к графику $p(x)$, проходящих через точку Q.

Задача 6.

Пусть A,B,C,D четыре различные сферы в пространстве. Предположим, что сферы A и B пересекаются по кругу, который находится в некоей плоскости P, сферы B и C пересекаются по кругу, который находится в некоей плоскости Q, сферы C и D пересекаются по кругу, который находится в некоей плоскости S, сферы D и A пересекаются по кругу, который находится в некоей плоскости T. Докажите, что плоскости P,Q,S,T либо параллельны некой одной и той же прямой, либо имеют общую точку.

Ariel University Center
Department of Computer Science and Mathematics
Tel: 03-9066618 E-mail: adom@ariel.ac.il Fax: 03-9066692
P.O. Box 3, Ariel 44837, ISRAEL

בס"ד

<u>Задача 7.</u>

Для квадратной матрицы A определим $\sin A = A - \frac{A^3}{3!} + \frac{A^5}{5!} - \frac{A^7}{7!} + \frac{A^9}{9!} - \dots$

а) Докажите, что если матрица A симметричная $A = A^T$, тогда все элементы матрицы $\sin A$ находятся на сегменте [-1,1].
б) Верно ли это для несимметричных матриц?

<u>Задача 8.</u>

Все позиции клетчатой ленты занумерованы числами 0,1,2,3,… На некоторых из этих позиций стоят фишки. Каждый ход происходит по следующему правилу:

1) если ни в одной из клеток с номерами $n \ge 1$ нет двух и более фишек, в клетку номер 1, добавляются 2 фишки,
2) в противном случае выбирается клетка с максимальным номером $n \ge 1$, в которой стоят хотя бы две фишки, и две из них раздвигаются, т.е. одна переставляется в позицию с номером $n-k$, а другая в позицию с номером $n+k$ $(1 \le k \le n)$, где число k может быть выбрано своё на каждом ходе.

Какое максимальное число ходов можно сделать, при условии, что ни одна из фишек не окажется в позиции с номером больше, чем 2008?

<u>Задача 9.</u>

Дана матрица 2008×2008, в клетках которой записаны нули и единицы. Известно, что любые 2 строчки отличаются по половине позиций. Доказать, что любые 2 столбца также отличаются по половине позиций.

Ariel University Center

Department of Computer Science and Mathematics

Tel: 03-9066618 E-mail: adom@ariel.ac.il Fax: 03-9066692

P.O. Box 3, Ariel 44837, ISRAEL

בס"ד

Задача 10.

Пусть $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$ - несократимая дробь, такая что $\frac{\alpha_n}{\beta_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Назовём простое число p хорошим, если оно делитель числа α_n при некотором n. Докажите, что множество хороших простых чисел p бесконечное.