Условия задач

1. Известно, что $a+b+c = 20$ и $ab+bc+ac = 100$. Найдите $a^2+b^2+c^2$?

2. Найдите значение максимального элемента матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^6 .$$

3. Бокал образован вращением параболы $y = x^2$ вокруг её оси симметрии. Найдите максимальный радиус шарика, который можно поместить в бокал, чтобы он касался дна (нижней точки) бокала?

4. Длина дороги равна n км (n — целое положительное число). На каждом километре дороги стоит столб, на котором указаны расстояния в километрах до двух её концов: $(1\ ;\ n-1)$, $(2\ ;\ n-2)$, ..., $(n-1\ ;\ 1)$. Оказалось, что на каждом столбе сумма всех написанных цифр (в обоих числах) равна 14. Найдите n.

5. Пусть $f(x) = 1 - |1 - 2x|$. Сколько решений имеет уравнение

$$f(f(f(f(f(f(f(f(f(f(x)))))))))) = x?$$

6. Вычислите

$$\frac{16}{\pi^5} \int\limits_0^{\pi/2} \left(x^4 + (x - \pi/2)^4\right) \sin^2 x \, dx.$$

7. Имеется неограниченное количество одинаково раскрашенных в шесть цветов кубиков (каждая грань в свой цвет). Пары таких кубиков произвольно склеиваются по грани. Какое максимальное количество различно окрашенных параллелепипедов $2 \times 1 \times 1$ может получиться таким образом?

8. Найдите последнюю ненулевую цифру числа 2010!

9. На поверхности куба с ребром $\sqrt{2}$ нарисована замкнутая ломаная, проходящая по всем его граням. Найдите минимальную возможную длину такой ломаной.

Ответы и решения

1. Ответ: 200.

Решение. Воспользуемся тождеством

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ac).$$

2. Ответ: 243.

Решение. При возведении данной матрицы в n-ю степень, получается матрица, все элементы которой равны 3^{n-1}. Это легко доказывается по индукции.

3. Ответ: 1/2.

Решение. Рассмотрим осевое сечение бокала и шарика. Нам нужно найти максимальный радиус окружности, имеющий с параболой $y = x^2$ единственную общую точку — начело координат. Поскольку окружность касается оси абсцисс, её уравнение имеет вид $x^2 + (y - r)^2 = r^2$, где r — радиус. Преобразуем это уравнение: $x^2 = 2ry - y^2$. Для точек окружности при $x \neq 0$ должно выполняться условие $y > x^2$, значит $y > 2ry - y^2$, или $y(y - (2r - 1)) > 0$. Последнее условие должно выполняться для всех $y > 0$, а это равносильно тому, что $r \leq \frac{1}{2}$.

4. Ответ: 59.

Решение. Так как число и его сумма цифр при делении на 9 дают одинаковые остатки, то сумма чисел записанных на каждой табличке (равная длине дороги) при делении на 9 дает остаток 5.

Искомое расстояние не может быть больше 59, так как тогда табличка, содержащая число 59, имела бы сумму цифр большую 13. Оно также не может равняться 5, 14, 23, 32, 41 и 50, так как в каждом из этих случаев нашлась бы табличка с суммой цифр 5. Это (1:4), (1:13), (1:22), (1:31), (1:40) и (10:40) соответственно.

Докажем, что расстояние в 49 км удовлетворяет условию. Если на одной стороне таблички стоит число $\overline{ab} = 10a+b$ (черта сверху означает, что a и b — цифры двузначного числа), то на другой стороне — число $\overline{(5-a)(9-b)} = 10(5-a) + (9-b)$. Сумма цифр такой таблички равна $a + b + (5 - a) + (9 - b) = 14$.

5. Ответ: 1024.

Решение. Функция $f(x)$ отображает единичный отрезок $[0, 1]$ в себя, причём оба конца отображаются в 0, а середина — в 1. На каждой из двух половинок $[0, 0.5]$ и $[0.5, 1]$ единичного отрезка она линейна. Поэтому поведение десятикратной итерации этой функции можно описать следующим образом: если разбить единичный отрезок на 2^{10} равных частей, то на каждой из них функция будет линейна, на частях с нечётными номерами она будет возрастать от 0 до 1, а на частях с чётными номерами — убывать от 1 до 0. (График этой сложной функции будет напоминать зубчатую пилу.) Поэтому на каждом из этих отрезков она пересекает прямую $y = x$ ровно по разу. Вне единичного отрезка решений этого уравнения нет.

6. Ответ: 1/10.

Решение. Обозначим через I значение интеграла из условия задачи и сделаем замену x на $\pi/2 - x$. Получаем,

$$I = \int\limits_0^{\pi/2} \left(x^4 + (x-\pi/2)^4\right) \cos^2 x \, dx$$

Значит,

$$I = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi/2} \left(x^4 + (x-\pi/2)^4\right) (\sin^2 x + \cos^2 x) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi/2} \left(x^4 + (x-\pi/2)^4\right) \, dx = \frac{1}{2} \cdot 2 \int\limits_0^{\pi/2} x^4 dx = \left.\frac{x^5}{5}\right|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^5}{160}.$$

Поэтому

$$\frac{16}{\pi^5} I = \frac{1}{10}\,.$$

7. Ответ: 84.

Решение. Подсчитаем сначала, сколькими способами можно выбрать пару граней кубиков, по которым происходит склейка. Если цвета склеиваемых граней различны, то имеются $C_6^2 = 15$ способов выбрать пару, а если одинаковые, то ещё 6. В каждом из этих 21 случая склейку можно произвести четырьмя способами (отличающимися поворотами склеиваемых кубиков на углы, кратные 90°). Итого, имеем $21 \cdot 4 = 84$ различных способа склейки кубиков.

8. Ответ: 4.

Решение. Рассмотрим разложение на простые множители числа

$$2010! = 2^{n_2} \cdot 3^{n_3} \cdot 5^{n_5} \cdot \ldots$$

Задача равносильна нахождению последней цифры числа $N = \dfrac{2010!}{10^{n_5}}$. Очевидно, что $n_2 > n_5$, поэтому искомая цифра чётна. Значит, достаточно найти её остаток от деления на 5. Обозначим, через $p(n)$ произведение всех целых чисел от 1 до n, исключая делящиеся на 5. Умножая по отдельности сначала числа, не делящиеся на 5, затем делящиеся на 5, но не делящиеся на 25, затем делящиеся на 25, но не делящиеся на 125, и т.д., получаем

$$N = \frac{p(2010)p(402)p(80)p(16)p(3)}{2^{n_5}},$$

и, кроме того, $n_5 = 402 + 80 + 16 + 3 = 501$. Заметим, что $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \equiv -1 (\operatorname{mod} 5)$. Тогда $p(2010) \equiv (-1)^4 20 \equiv 1 (\operatorname{mod} 5)$. Аналогично, $p(420) \equiv 2 (\operatorname{mod} 5)$, $p(80) \equiv 1 (\operatorname{mod} 5)$, $p(16) \equiv 4 (\operatorname{mod} 5)$, $p(3) \equiv 1 (\operatorname{mod} 5)$. Кроме того, $2^{501} \equiv 2 (\operatorname{mod} 5)$. Значит,

$$N \equiv \frac{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1}{2} \equiv 4 (\operatorname{mod} 5)$$

Итак, искомая цифра чётна и даёт при делении на 5 остаток 4. Значит, она равна 4.

9. Ответ: 6.

Решение. Прежде всего заметим, что проекция ломаной на каждую координатную ось имеет длину не меньше $2\sqrt{2}$ — удвоенной величины ребра. Пусть, x_y и y_x — суммарные длины проекций звеньев ломаной, находящихся в гранях, параллельных координатной плоскости xy на оси x и y соответственно. Аналогичные обозначения введём и для остальных звеньев. Тогда длина ломаной будет не меньше, чем

$$\sqrt{x_y^2 + y_x^2} + \sqrt{x_z^2 + z_x^2} + \sqrt{z_y^2 + y_z^2}.$$

По неравенству о среднем квадратичном и среднем арифметическом, это не меньше, чем

$$\frac{\sqrt{2}}{2}((x_y + y_x) + (x_z + z_x) + (z_y + y_z)) = \frac{\sqrt{2}}{2}((x_y + x_z) + (y_x + y_z) + (z_x + z_y)) \geq$$

$$\geq \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3 = 6.$$

Длина 6 может быть достигнута для ломаной, являющейся сечением куба, перпендикулярном главной диагонали (и пересекающему все его грани). Например, если такое сечение проходит через центр куба, то ломаная представляет собой правильный шестиугольник с ребром 2.