1. В первом стакане находится некоторое количество яблочного сока, во втором — персикового, в третьем — грейпфрутового, в четвертом — морковного. Известно, что яблочный сок слаще грейпфрутового, а персиковый — морковного. (Слаще тот сок, в котором больше концентрация сахара.) Верно ли, что если смешать содержимое первых двух стаканов, результат окажется слаще, чем если смешать содержимое третьего и четвертого стаканов?

2. Точка $P = P(a; b)$ расположена в первом координатном углу. Рассмотрим круг радиуса $R > \sqrt{a^2 + b^2}$ с центром в точке P. Обозначим через S_i площадь части этого круга, лежащую в i-м координатном углу ($i = 1; 2; 3; 4$). Найти $S_1 - S_2 + S_3 - S_4$.

3. Эффективность использования топлива для автомобиля $E(v)$ измеряется в километрах на литр топлива (Это количество километров которые проедет автомобиль, при постоянной скорости v, затратив 1 литр топлива). (v — скорость автомобиля в км/ч). Найти полный расход топлива за 1 час поездки, если $E(v) = \sqrt{v^3}/168$, а $v = 144\sqrt[4]{t}$.

4. Последовательность x_n задана рекуррентным соотношением
$$x_1 = x,\ x_{n+1} = \frac{(m-1)x_n + \dfrac{a}{x_n^{m-1}}}{m},$$
где x и a — положительные действительные числа, m — целое положительное число. Определите, при каких x, a и m последовательность сходится и найдите её предел.

5. Рабочие должны были выложить пол прямоугольной комнаты плитками размера 2×2 и 1×4 (размера пола таковы, что он может быть полностью покрыт некоторым набором плиток указанных размеров). Нужное количество плиток каждого размера было подготовлено. Однако при переносе их к месту работы три плитки размера 2×2 разбились. Их решили заменить тремя плитками размера 1×4. Докажите, что выложить поверхность этого пола имеющимися плитками не удастся. (Резать плитки запрещается.)

6. Сколько точек с целочисленными координатами расположено внутри сферы радиуса $R = 200$ с центром в начале координат? Дайте приблизительный ответ с ошибкой не более 2%.

7. Пусть $P_n(x)$ — многочлен четной степени n ($n > 1$), коэффициент при старшей степени которого положителен, и $P_n(x) > P_n''(x)$ при всех x. Докажите, что $P_n(x) > 0$ для всех x.

8. Имеется куча из 2010 камней. Трое игроков — Веня, Беня и Женя делают свои ходы друг за другом по очереди. Первым ходит Веня, затем — Беня, затем — Женя и т. д. по кругу. Каждый игрок в свой ход забирает один или два камня из кучи. Игрок, забравший последний камень, получает 10 долларов, следующий за ним по очереди получает 1 доллар, а предыдущий ничего не получает. Каждый игрок выбирает ходы самым разумным для себя способом (то есть, стремится максимизировать свой выигрыш, зная, что остальные игроки в своей стратегии придерживаются аналогичной цели). Каков будет результат игры?

9. Строки определителя третьего порядка состоят из трех последовательных цифр некоторых трехзначных чисел, каждое из которых делится нацело на 17. Доказать, что такой определитель также делится на 17.

10. Можно ли через вершины куба провести 8 параллельных плоскостей (по одной через каждую вершину) так, чтобы расстояния между двумя соседними плоскостями были бы равны?

11. Каждый муравей может в одиночку тащить по поверхности стола хлебную крошку. Несколько муравьев распределили свои усилия таким образом, что хлебная крошка остается на месте. (Это не означает, что сумма их сил обязательно равна нулю, но она недостаточна для преодоления силы трения между крошкой и столом.) Докажите, что при этом можно удалить одного муравья так, чтобы хлебная крошка сдвинулась с места.

12. В Институте Социальной Справедливости им. П. П. Шарикова работает 15 сотрудников. Зарплата каждого равна целому количеству долларов и не превосходит 10 долларов (нулевая зарплата возможна). Заведующий лаборатории каждый месяц повышает зарплату 11 из них на 1 доллар по своему усмотрению. За какое минимальное число месяцев он может гарантированно уравнять зарплаты при любом их первоначальном распределении?