

1. בכוס אחת יש כמות מסוימת של מיץ תפוחים, בכוס השנייה - מיץ אפרסקים, בכוס השלישית - מיץ אשכוליות, וברביעית - מיץ גזר. ידוע כי מיץ תפוחים יותר מתוק מאשר מיץ אשכוליות (כלומר, אחוז הסוכר בו גבוה יותר), ומיץ אפרסקים יותר מתוק מאשר מיץ גזר. מערבבים מיץ תפוחים עם מיץ אפרסקים, ומיץ אשכוליות עם מיץ גזר. האם בהכרח התערובת הראשונה מתוקה יותר מן התערובת השנייה?

2. נתונה נקודה $P = P(a, b)$ הנמצאת ברביע הראשון. מרכזו של מעגל נמצא בנקודה P

ורדיוסו $R > \sqrt{a^2 + b^2}$. נסמן ב- S_i את השטח של חלק המעגל הנמצא ברביע ה- i ($i = 1, 2, 3, 4$).

מצאו את $S_1 - S_2 + S_3 - S_4$.

3. היעילות $E(v)$ של צריכת הדלק ע"י מכונית נמדדת בקילומטרים לליטר של דלק. (זאת

אומרת שליטר של דלק יספיק, כשנוסעים במהירות קבועה של v קמ"ש, לנסיעה של

$E(v)$ קילומטרים). כמה ליטרים דלק צריכה מכונית לשעת הנסיעה אם $E(v) = \frac{\sqrt{v^3}}{168}$,

כאשר $v(t) = 144\sqrt[4]{t}$ הוא הזמן, בשעות, מתחילת הנסיעה)?

4. הסדרה x_n מוגדרת ע"י הנוסחה הרקורסיבית הבאה: $x_1 = x$, $x_{n+1} = \frac{(m-1)x_n + \frac{a}{x_n^{m-1}}}{m}$

x, a, m - מספרים ממשיים חיוביים, m - מספר שלם חיובי. מצאו את הערכים של x, a, m שעבורם הסדרה מתכנסת ומצאו את גבולה.

5. ידוע כי ניתן לרצף רצפה של אולם מלבני בכמות מסוימת של מרצפות בגודל 2×2 ו-

1×4 . הפועלים הכינו כמות נדרשת של מרצפות מכל סוג, אך שלוש מרצפות בגודל 2×2

נשברו והוחלפו בשלוש מרצפות בגודל 1×4 . הוכיחו כי לא ניתן לרצף כעת את האולם.

(אסור לחתוך מרצפות).

6. מהו מספר הנקודות עם קואורדינטות שלמות בתוך כדור שמרכזו בראשית הצירים

ורדיוסו 200? תנו תשובה משוערת, שהטעות בה לא עולה על 2%.

7. יהי $P_n(x)$ פולינום ממעלה זוגית n ($n > 1$). המקדם של החזקה הגבוהה ביותר הוא מספר

חיובי ולכל x מתקיים האי-שוויון $P_n(x) > P_n''(x)$. הוכיחו כי $P_n(x) > 0$ לכל x .

8. עמי, רמי וסמי משחקים במשחק הבא: יש ערימה של 2010 אבנים. כל אחד מהשחקנים יכול לקחת בתורו אבן אחת או שתי אבנים מן הערימה. עמי משחק ראשון, רמי שני, סמי שלישי וכן הלאה, מעגלית. השחקן שלוקח את האבן האחרונה מקבל \$10. השחקן שתורו אחריו מקבל \$1, והשחקן שתורו לפניו לא מקבל דבר. כל אחד מהשחקנים בוחר באסטרטגיה אופטימלית כדי לזכות בסכום המרבי ויודע שהשניים האחרים משתמשים באסטרטגיות האופטימליות שלהם. מהי תוצאת המשחק?

9. שלושה מספרים תלת-סיפרתיים המתחלקים ב-17 נרשמו זה מתחת לזה כך שנוצרה מטריצה 3×3 (כל שורה שלה מורכבת מספרות העוקבות של אחד מהמספרים הנתונים). הוכיחו כי הדטרמיננטה של המטריצה מתחלקת ב-17 גם היא.

10. נתונה קובייה. האם ניתן להעביר 8 מישורים מקבילים דרך 8 קדקודי הקובייה (מישור אחד דרך כל קדקוד) כך שהמרחקים בין כל שני מישורים סמוכים יהיו זהים?

11. כל נמלה יכולה לסחוב פירור לחם על גבי השולחן. מספר נמלים מנסות (במלוא כוחן) לסחוב פירור אחד, כשכל אחת מושכת בכוון שלה, אך הפירור לא זז מהמקום (כלומר, שקול הכוחות על הפירור לא מספיק כדי להזיזו, אך אינו בהכרח אפס). הוכיחו כי ניתן להוציא נמלה אחת כך שהפירור יזוז.

12. במכון לצדק חברתי עובדים 15 חוקרים. שכרו של כל אחד מהם הוא מספר שלם של דולרים שאינו עולה על \$10 (שכר של \$0 הוא אפשרי). כל חודש מעלה ראש המכון את שכרם של 11 חוקרים לפי בחירתו בדולר אחד. מטרתו של ראש המכון היא להשוות את שכרם של כל החוקרים. מהו מספר החודשים הקטן ביותר לו הוא זקוק, בהינתן התפלגות התחלתית כלשהי של השכר?